# Palindromy w matematyce

Wojciech Plandowski
Wydział Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Słowa kluczowe: palindromy

## 1. Wprowadzenie

Każdy wie czym jest palindrom. Jest to fragment tekstu który czytany wprzód i wspak jest taki sam. Jednym z przykładów palindromów jest zdanie w języku angielskim „C is a basic". Palindrom ten może być rozszerzony do palindromu o nieograniczonym rozmiarze: „C is a basic, is a basic, is a basic ...".

Palindromy w matematyce mają trochę bardziej precyzyjną definicję. Dokładniej, każda litera włączając spację jest znacząca. Małe i duże litery są różnymi literami. Używając tej definicji zdanie „C is a basic" nie jest palindromem bo po dużej literze C jest spacją zaś przed ostatnią literą c nie ma spacji. Co więcej, pierwsza litera C jest literą dużą podczas gdy ostania litera c małą. Palindromem w sensie matematycznym jest „cisabasic".

Palindromy w sensie matematycznym nie muszą mieć znaczenia, na przykład ciąg liter „abbabba" jest dobrym palindromem. Palindromy są badane głównie w dwu dziedzinach matematyki: kombinatoryce słów i algorytmach tekstowych. Pojawiają się także w teorii liczb i językach formalnych. W kombinatoryce słów palindromy występują w kilku twierdzeniach związanych głównie ze słowami Szturma. W algorytmach tekstowych jest kilka algorytmów które sprawdzają własności testu wejściowego – własności związanych z palindromami. W teorii liczb bada się liczby które wyglądają jak palindromy. W językach formalnych zbiór palindromów jest przykładem języka bezkontekstowego który nie jest deterministyczny bezkontekstowy. Podamy teraz po jednym przykładzie występowania palindromów w kombinatoryce słów i w algorytmach tekstowych..

## 2. Palindromy w kombinatoryce słów

Kombinatorka słów bada własności słów włączając ich strukture i regularności w nich występujące. Palindrom jest pewnym rodzajem regularności. Palindromy w kombinatoryce słów pojawiają się w kilku twierdzeniach [2]. Wyjaśnimy ich związek z jednym z najbardziej podstawowych i jednym z najważniejszych twierdzeń w tej dziedzinie matematyki – Twierdzeniem Fine'a i Wilfa. Aby wyjaśnić to twierdzenie musimy wprowadzić kilka definicji.

Literą nazwiemy albo 'a' albo 'b'. Słowem nazwiemy dowolny ciąg liter, na przykład „abbabbabbabba". Liczba liter w słowie w jest nazywana długością w i jest oznaczana przez |w|. i-ta litera słowa w jest oznaczna przez w[i]. Mamy w=w[1]...w[|w|]. Okresem słowa w jest liczba p taka, że w[i]=w[i+p], dla 1≤i≤|w|-p. Jeśli p jest okresem słowa w, to w jest postaci uuu..uu' gdzie u=w[1]...w[p] i u'=w[1]...w[k], dla pewnego k≤p. Łatwo zauważyć, że jeśli p jest okresem w to 2p, 3p, i wszystkie inne wielokrotności p są okresami w.

*Przykład*. Mamy abababa[2]=b. Długością słowa abababa jest 7. Liczby 2, 4, 6, 7 są okresami abababa. Ponieważ 4 jest okresem słowa abababa słowo to jest postaci uu' gdzie u=abab i u'=aba.

Oznaczmy przez nwd(p,q) największą liczbę dzielącą zarówno p jak i q. Na przykład, nwd(25,15)=5. Wtedy Twierdzenie Fine'a i Wilfa można sformułować w następujący sposób.

**Twierdzenie Fine'a i Wilfa.** Niech p i q będą dwoma okresami słowa w. Jeśli p+q-gcd(p,q)≤|w|, to nwd(p,q) jest także okresem w.

Zauważmy, że jeśli nwd(p,q) jest okresem w, to p i q jako wielokrotności nwd(p,q) też są okresami w. Dla nwd(p,q)=1, Twierdzenie Fine'a i Wilfa przyjmuje następującą postać.

**Twierdzenie Fine'a i Wilfa (przypadek nwd(p,q)=1).** Let p and q are two periods of a word w. Let gcd(p,q)=1. If p+q-1≤|w|, then w consists only of letters a or only of letters b.

Nasuwa się następujące pytanie: co się dzieje jesli p i q są okresami w, nwd(p,q)=1 i |w|=p+q-2? Czy w musi się składać wyłącznie z liter a lub wyłącznie z liter b? Odpowiedzią na to pytanie jest: nie. Dla każdych p i q tkich że nwd(p,q)=1 istnieje słowo o długości p+q-2 które zawiera litery a i b i takie, że p i q są okresami słowa w. To oznacza, że ma sens wprowadzenie następującej definicji. Słowo w jest centralne jeśli istnieją liczby p i q takie, że |w|=p+q-2 i p i q są okresami w. Słowa takie charakteryzuje następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** Słowo w jest centralne wtedy i tylko wtedy gdy albo składa się wyłącznie z liter a, lub wyłacznie z liter b, lub jest palindromem i jest postaci uabv gdzie u i v są palindromami.

## 3. Palidromy w algorytmach tekstowych

Algorytmy tekstowe są częścią algorytmiki która działa na słowach zwanych tu tekstami. Palindromy w algorytmach tekstowych były badane w kontekstach zarówno algorytmów sekwencyjnych [2] jak i algorytmów równoległych [1]. Zbadamy jeden problem, który zaprowadzi nas do bardzo użytecznej struktury danych dla algorytmów sekwencyjnych związanych z palindromami. Zaczniemy od wprowadzenia użytecznej notacji. Przez w[i..j] będziemy rozumieli słowo w[i]w[i+1]..w[j]. Problem który zbadamy jest podstawowy.

**Problem:** Dane słowo w. Zaprojektuj strukturę danych która pozwala, dla danych dwu pozycji i i j słowa w, sprawdzić czy słowo w[i..j] jest palindromem.

Oczywistym rozwiązaniem naszego problemu jest stworzenie dwuwymiarowej tablicy logicznej p[i,j], dla $1 \leq i \leq j \leq |w|$ takiej, że p[i,j]=true wtedy i tylko wtedy gdy w[i..j] jest palindromem. Używając tablicy p możemy odpowiedzieć na pytanie czy w[i..j] jest palindromem w czasie stałym. Jednak to rozwiązanie ma jedną wadę: rozmiar tablicy p jest kwadratowy względem długości słowa w a zatem każdy algorytm który oblicza p musi działać w czasie kwadratowym.

Rozwiązanie zaproponowane przez Manachera jest sprytniejsze. Od tej chwili zakładamy, że interesują nas tylko palindromy parzyste, tzn. j-i+1 jest parzyste. Rozszerzenie naszego rozumowania na wszystkie palindromy nie jest zadaniem trudnym więc pozostawimy jest czytelnikowi. Obliczymy tablicę liczb całkowitych R taką, że R[i] jest maksymalna liczbą taką, że w[i-j..i+j-1] jest palindromem. Oczywiście rozmiar tablicy jest liniowy względem |w|.

R[i] jest po prostu promieniem najdłuższego palindromu parzystego którego środek leży między pozycjami i-1 i i w słowie w. Jeśli chcemy sprawdzić czy w[i..j] jest palindromem parzystym sprawdzamy po prostu czy $R[(j+i+1)/2] \geq (j-i+1)/2$, to znaczy czy promień najdłuższego palindromu o środku będącym środkiem w[i..j] jest większy niż połowa długości w[i..j].

*Przykład.* Weźmy słowo abbaa. Wtedy R[3]=2 ponieważ największym palindromem parzystym o środku pomiędzy pozycjami 2 i 3 jest abba. Podobnie R[5]=1 ponieważ największym palindormem o środku pomiędzy pozycjami 4 i 5 jest aa.

Obliczenie tablicy R w czasie kwadratowym jest zadaniem bardzo łatwym. Pozostawiamy je więc czytelnikowi. Z drugiej strony algorytm liniowy jest nietrywialny i wymaga udowodnienia pewnego lematu z kombinatoryki słów. Czytelników zainteresowanych tym algorytmem zachęcam do przeczytania [2].

**Twierdzenie** Tablica R może być obliczona w czasie liniowym.

## Bibliografia

1. A. Apostolico, D. Breslauer, Z. Galil, "Parallel detection of all palindromes in a string".
2. L. Banachowski, A. Kreczmar, W. Rytter, Sprawdzanie własności syntaktycznych tekstów związanych z palindromami", Rozdział 3.3 w "Analiza Algorytmów i Struktur Danych", WNT 1989 (in Polish), p. 176-188.
3. M. Lothaire, "Sturmian words", Rozdział 2 w "Algebraic Combiatorics on Words", Cambridge University Press 2002, p.45-110.